# 1 Indução

Apresentamos neste texto uma técnica fundamental para resolver problemas de matemática, chamada de indução.

Vamos resolver o seguinte problema: Escreve em função de $n$ a soma $1+2+4+8+...+2^n$.

A primeira coisa a fazer é começar com os casos pequenos. Verificamos então que

$1 = 1$

$1 + 2 = 3$

$1 + 2 + 4 = 7$

$1 + 2 + 4 + 8 = 15$ $1 + 2$

$+ 4 + 8 + 16 = 31$

...

Não é difícil adivinhar então a resposta: $2^{n+1}-1$, mas como é que temos a certeza? Utilizamos agora indução para demonstrar esta afirmação.

Começamos por ver, o que já fizemos, que a fórmula se verifica para o primeiro caso. Agora fazemos o seguinte raciocínio: supomos que a fórmula é válida para um certo $k$ e provamos que nesse caso também é válida para $k + 1$.

Fazemos isto do seguinte modo: $1 + 2 + 4 + ... + 2^k + 2^{k+1} = (1 + 2 + 4 + ... + 2^k) + 2^{k+1}$.

Mas estamos a supôr a fórmula válida para $k$, ou seja, que $1 + 2 + 4 + ... + 2^k = 2^{k+1} - 1$.

Então $(1 + 2 + 4 + ... + 2^k) + 2^{k+1} = (2^{k+1} - 1) + 2^{k+1} = 2 \times 2^{k+1} - 1 = 2^{k+2} - 1$.

Provámos assim o chamado “passo de indução”, ou seja, que se a fórmula se verifica para um inteiro se verifica para o seguinte. Mas como a fórmula é válida para $n = 1$, é válida para $n = 2$, e como é válida para $n = 2$, é válida para $n = 3$ e assim sucessivamente, sendo válida para todos os inteiros.

Vamos dar mais um exemplo:

Exemplo 1 A soma dos primeiros $n$ números ímpares positivos é $n^2$, ou seja:

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + ... + (2n - 1) = n^2$$

Einstein Explicações
Rua do Bocage 116 Faro
Einstein.explicacao@gmail.com
http://einsteinexplicacoes.mozello.com

Resolução. Para $n = 1$ temos que $1 = 1$, o que é obviamente verdade.

Para provar o passo de indução supomos que a afirmação é válida para $n$ e provemos para $n + 1$. Temos que

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) + (2(n + 1) - 1) =$$

$$= n^2 + (2n + 2 - 1) =$$

$$= n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$$

e fica então provado o passo de indução, o que completa a demonstração. ■

Deixamos agora vários exercícios para treinares esta técnica.

Exercícios 1 Prova por indução as seguintes igualdades:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

Se $r$ 6= 1 é um número real, então

$$r^0 + r^1 + r^2 + \ldots + r^n = \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1}.$$

Chama-se o factorial de $n$ (e escreve-se $n!$) ao produto $1 \times 2 \times \ldots \times n$. Prova que se $n > 3$ então $n^2 < n!$

$5^n - 1$ é múltiplo de 4.

Se $n \geq 5$ então $4^n > n^4$

Os números de Fibonacci estão definidos de seguinte forma: $f_0 = f_1 = 1$ e se $n > 1$, $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$.

(Assim temos $f_2 = 2$, $f_3 = 3$, $f_4 = 5$, $f_5 = 8$, $f_6 = 13$,...). Prova que $2^n > f_n > (1{,}5)^n$ para todo o $n > 4$.

Exercícios 2 Em quantas partes se pode dividir no máximo o plano com $n$ retas?