Método de Indução Matemática

A **indução matemática** é um método de demonstração que pode ser usado quando queremos mostrar que uma certa propriedade **A(n)** é válida para o conjunto IN dos números naturais. Baseia-se no princípio de indução matemática que é constituído por duas fases:

1ª – Mostrar que a propriedade é válida para n=1, ou seja, que A(1) é verdadeira.

2ª - Mostrar que se a propriedade é válida para um certo número ***p*** então é válida para ***p+1***, ou seja, que

$A(p) \Rightarrow A(p+1)$ é verdadeira (hereditariedade).

Então a condição **A(n) é universal** em IN.

Nota: Não é obrigatório começar com n=1. Se na primeira fase começarmos por exemplo por um número ***b***, demonstramos que a propriedade é válida para os números naturais maiores ou iguais a ***b.***

EXEMPLO: Mostre que, 1+2+3+4+…+ n = $\frac{1+n}{2} \times n, \forall_{n \in IN}$

Demonstração:

Verificar que é verdadeira para n = 1 1= $\frac{1+1}{2} \times 1 \quad (verd.)$

Suponhamos que é verdadeira para um número natural ***p*** e vamos deduzir que, então, é verdadeira para o número natural ***p+1***.

Ou seja,

Hipótese: 1+2+3+4+…+ p = $\frac{1+p}{2} \times p$

Tese: 1+2+3+4+…+ p+(p+1) = $\frac{1+(p+1)}{2} \times (p+1) = \frac{p+2}{2} \times (p+1)$

Ora, 1+2+3+….+p+(p+1)=(1+2+3+..+p)+(p+1)

= $\frac{1+p}{2} \times p$ +)p+1)

=(p+1)($\frac{p}{2}+1)$ = $\frac{p+2}{2} \times (p+1)$ c.q.m.

Como é verdadeira para n=1 e verifica a hereditariedade então a condição verifica-se para todo o número natural.

Exercícios

Mostre, por indução matemática, que:

1. 1 + 3 + 5 +…..+(2n-1) = $n^2, \forall_{n \in IN}$

2. $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \forall_{n \in IN}$

3. a soma dos **n** primeiros números pares é n^2+n ,ou seja, $\sum_{k=1}^{n} (2k) = n^2 + n$

4. quando **n** pessoas se encontram e se cumprimentam, o número de apertos de mão é dado por $\frac{n(n-1)}{2}$