MATEMÁTICA A - 11º Ano
Sucessões
Propostas de resolução

Exercícios de exames e testes intermédios

1. Como (u_n) é progressão geométrica (u_n), designado por r a razão, temos que o termo de ordem n é

$$u_n = u_1 \times r^{n-1}$$

Assim, temos que

- $u_4 = 32 \Leftrightarrow u_1 \times r^{4-1} = 32 \Leftrightarrow u_1 \times r^3 = 32 \Leftrightarrow u_1 = \frac{32}{r^3}$
- $u_8 = 8192 \Leftrightarrow u_1 \times r^{8-1} = 8192 \Leftrightarrow u_1 \times r^7 = 8192 \Leftrightarrow u_1 = \frac{8192}{r^7}$

Desta forma, e como a progressão é monótona crescente, temos que a razão é positiva ($r > 0$), pelo que podemos calcular o valor da razão:

$$\frac{32}{r^3} = \frac{8192}{r^7} \Leftrightarrow \frac{r^7}{r^3} = \frac{8192}{32} \Leftrightarrow r^4 = 256 \Leftrightarrow r = \sqrt[4]{256} \underset{r>0}{\Rightarrow} r = 4$$

Logo, obtemos o quinto termo, multiplicando o quarto termo pela razão:

$$u_5 = u_4 \times r = 32 \times 4 = 128$$

Resposta: **Opção B**

Exame – 2016, 2ª Fase

2. Calculando os limites das duas sucessões vem que:

- $\lim (u_n) = \lim \left(\frac{kn+3}{2n}\right) = \lim \left(\frac{kn}{2n} + \frac{3}{2n}\right) = \lim \left(\frac{k}{2} + \frac{3}{2n}\right)$
  Como a sucessão $\left(\frac{3}{2n}\right)$ é um infinitésimo, então, $\lim \left(\frac{k}{2} + \frac{3}{2n}\right) = \frac{k}{2}$
- $\lim (v_n) = \lim \left(\ln \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right) = \ln \left(\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right) = \ln \left(\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right) = \ln e = 1$

Assim, vem que:

$$\lim (u_n) = \lim (v_n) \Leftrightarrow \frac{k}{2} = 1 \Leftrightarrow k = 2$$

Resposta: **Opção B**

Exame – 2016, 1ª Fase

3. Como (a_n) é progressão geométrica (a_n), designado por r a razão, temos que o termo de ordem n é

$$a_n = a_1 \times r^{n-1}$$

Assim, temos que

- $a_3 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow a_1 \times r^{3-1} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow a_1 \times r^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow a_1 = \frac{1}{4 \times r^2}$
- $a_6 = 2 \Leftrightarrow a_1 \times r^{6-1} = 2 \Leftrightarrow a_1 \times r^5 = 2 \Leftrightarrow a_1 = \frac{2}{r^5}$

Desta forma, podemos calcular o valor da razão:

$$\frac{1}{4 \times r^2} = \frac{2}{r^5} \Leftrightarrow \frac{r^5}{r^2} = 2 \times 4 \Leftrightarrow r^3 = 8 \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{8} \Leftrightarrow r = 2$$

E o valor do primeiro termo:

$$a_6 = 2 \Leftrightarrow a_1 = \frac{2}{r^5} \underset{r=2}{\Leftrightarrow} a_1 = \frac{2}{2^5} \Leftrightarrow a_1 = \frac{1}{2^4}$$

Assim, calculado o valor do vigésimo termo, vem

$$a_{20} = a_1 \times r^{20-1} = \frac{1}{2^4} \times 2^{19} = \frac{2^{19}}{2^4} = 2^{19-4} = 2^{15} = 32\,768$$

Resposta: **Opção C**

Exame – 2015, Ép. especial

4. Analisando cada uma das expressões temos:

- Se $u_n = (-1)^n$, então $u_1 = (-1)^1 = -1$; $u_2 = (-1)^2 = 1$ e $u_3 = (-1)^3 = -1$
  Como $u_2 > u_1$ mas $u_3 < u_2$ a sucessão não é monótona.
- Se $u_n = (-1)^n.n$, então $u_1 = (-1)^1 \times 1 = -1$; $u_2 = (-1)^2 \times 2 = 2$ e $u_3 = (-1)^3 \times 3 = -3$
  Da mesma forma, temos que, como $u_2 > u_1$ mas $u_3 < u_2$ a sucessão não é monótona.
- Se $u_n = -\frac{1}{n}$, como $u_{n+1} = -\frac{1}{n+1}$, vem que

  $$u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{n+1} - \left(-\frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} = -\frac{n}{n(n+1)} + \frac{n+1}{n(n+1)} = \frac{-n+n+1}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}$$

  Ou seja, $u_{n+1} - u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ (porque como $n > 0$, então $n(n+1) > 0$ e também $\frac{1}{n(n+1)}$), ou seja u_n é uma sucessão **monótona** crescente.

  Temos ainda que, como u_n é monótona crescente, $u_n > u_1, \forall n > 1$ e que $u_n < 0, \forall n \in \mathbb{N}$ (porque como $\frac{1}{n} > 0, n \in \mathbb{N}$ então $-\frac{1}{n} < 0, n \in \mathbb{N}$), pelo que $-1 \leq u_n < 0$, ou seja u_n **é limitada**.
- Se $u_n = 1 + n^2$, então u_n é um infinitamente grande positivo, ou seja, $\forall \delta \in \mathbb{R}, \exists k \in \mathbb{N} : u_k > \delta$, ou seja a sucessão não é limitada.

Resposta: **Opção C**

Exame – 2015, 2ª Fase

5. Recorrendo à definição da sucessão (u_n) temos que

- $u_1 = a$
- $u_2 = -3u_1 + 2 = -3a + 2$
- $u_3 = -3u_2 + 2 = -3(-3a + 2) + 2 = 9a - 6 + 2 = 9a - 4$

Resposta: **Opção B**

Exame – 2015, 1ª Fase

6. Começando por determinar o valor de u_2, vem:

$$u_2 = u_1 + 2 \times 2 = 3 + 4 = 7$$

Resolvendo a equação $w_n = u_2$, temos:

$$w_n = u_2 \Leftrightarrow 5n - 13 = 7 \Leftrightarrow 5n = 7 + 13 \Leftrightarrow n = \frac{20}{5} \Leftrightarrow n = 4$$

Resposta: **Opção B**

Teste Intermédio 11º ano – 24.05.2011

7. Determinando uma expressão de $u_{n+1} - u_n$ temos

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1-2(n+1)}{(n+1)+3} - \frac{1-2n}{n+3} = \frac{1-2n-2)}{n+1+3} - \frac{1-2n}{n+3} = \frac{-2n-1}{n+4}_{(n+3)} - \frac{1-2n}{n+3}_{(n+4)} =$$

$$= \frac{(-2n-1)(n+3)-(1-2n)(n+4)}{(n+4)(n+3)} = \frac{-2n^2-6n-n-3-\left(n+4-2n^2-8n\right)}{(n+4)(n+3)} =$$

$$= \frac{-2n^2-6n-n-3-n-4+2n^2+8n}{(n+4)(n+3)} = \frac{-7}{(n+4)(n+3)}$$

Como $n > 0$, temos que $(n+4)(n+3) > 0$, e como o quociente de um número negativo (-7) por um positivo ($(n+4)(n+3)$), é sempre um valor negativo, temos que

$$u_{n+1} - u_n < 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

Ou seja, u_n é uma sucessão **monótona decrescente**.

Teste Intermédio 11º ano – 24.05.2011